Le equazioni

Il concetto di equazione, come lo intendiamo oggi, nasce e si sviluppa nel mondo arabo.
Al-Khuwarizmi introduce i termini *al-jabr* (restaurazione o completamento) che si riferiva alla trasposizione dei termini sottratti da un membro all'altro dell'equazione, e *muqabalah* (riduzione o equilibrio) che indicava la cancellazione dei termini simili che compaiono in entrambi i membri di una equazione. Vengono distinti sei tipi di equazioni di primo e secondo grado formate dalle tre quantità *radici*, *quadrati* e *numeri*:

1. quadrati uguali a radici: $x^2 = x$,
2. quadrati uguali a numeri: $x^2 = a$,
3. radici uguali a numeri: $x = a$,
4. quadrati e radici uguali a numeri: $x^2 + ax = b$,
5. quadrati e numeri uguali a radici: $x^2 + a = bx$,
6. quadrati uguali a radici e numeri: $x^2 = ax + b$,

in cui ai parametri a e b sono forniti valori **positivi**, e per ogni equazione al-Khuwarizmi dà la regola per calcolare la soluzione positiva, seguita da una dimostrazione geometrica di completamento del quadrato.
Gli arabi non usavano né abbreviazioni né simboli, soltanto alcuni nomi per nominare l'incognita e le sue potenze. Per esempio un'equazione di secondo grado veniva presentata da al-Khuwârizmî così:

"Un quadrato e dieci delle sue radici sono uguale a nove e trenta (trentanove), cioè tu sommi dieci radici a un quadrato e la somma è uguale a nove e trenta".

Nella notazione moderna, l'equazione è $x^2 + 10x = 39$. Ecco come veniva calcolata la soluzione: prendere metà delle radici (e cioè 5), moltiplicare tale quantità per se stessa (si ottiene 25) e aggiungere questo quadrato sia al primo che al secondo membro. Si è così ottenuta l'equazione $x^2 + 10x + 25 = 64$. Si riconosce che al primo membro si è formato un quadrato perfetto e si estrae la radice quadrata da entrambi i membri. Si ottiene l'equazione $x + 5 = 8$ e quindi la soluzione 3.
La soluzione corrispondente all'altra determinazione della radice quadrata non viene considerata.

Equazioni cubiche

Uno dei più interessanti progressi dovuti alla matematica araba è la risoluzione di equazioni cubiche mediante l'intersezione di sezioni coniche.
Dopo la diffusione del *Trattato di Algebra* di al-Khuwârizmî si svilupparono due correnti di idee:
* un problema geometrico si può ricondurre alla risoluzione di un'equazione algebrica ad un'incognita;
* la risoluzione di un'equazione di terzo grado, per esempio, si può ricondurre ad una costruzione geometrica.
Il contributo più importante della matematica araba è precisamente l'avere iniziato lo sviluppo di questa corrispondenza tra la geometria e l'algebra cinque secoli prima di Descartes e di Fermat.
I principali rappresentanti di questa corrente di pensiero sono: **Omar al-Khayyam** (1038-48 - 1123) e **Sharaf ad-Din al-Tusi** (1130 - ?).

Khayyam nel 1070 pubblicò a Samarcanda il *Ghiy-ath al-Din Abu'l-Fath Umar ibn Ibrahim Al-Nisaburi al-Khayyami*. In questo libro, tradotto come il "Trattato sulla dimostrazione dei problemi di algebra", la trasformazione dei problemi geometrici in problemi algebrici e viceversa viene impostata in modo molto generale, fino a ricondurre a equazioni di terzo grado, per cui vengono proposte soluzioni geometriche o numeriche approssimate. Khayyam stabilisce che l'equazione di terzo grado può essere risolta usando le coniche, ma non è risolvibile servendosi esclusivamente di riga e compasso, in tal modo anticipando un risultato di 750 anni dopo.

Al-Khayyam classifica le equazioni secondo il loro grado e il numero di monomi che le compongono. Questo lo porta a considerare 25 forme canoniche di cui alcune sono già state studiate da al-Khuwârizmî. La soluzione delle forme restanti è trovata con l'aiuto delle sezioni coniche. Questa classificazione riguarda soltanto quelle equazioni in cui le soluzioni sono positive. Prima di risolvere geometricamente un'equazione, scrive la sua forma omogenea, per esempio l'equazione

$$x^3 + ax = b$$

con a e b positivi, viene scritta come

$$x^3 + p^2x = p^2q$$

dove $p^2 = a$ e $p^2q = b$.

Al-Khayyam la risolve costruendo una parabola di equazione $y = x^2/p$ e poi tracciando la circonferenza avente come diametro QR di lunghezza uguale a q (la sua equazione è $x^2 + y^2 - q\,x = 0$) . Per il punto P di intersezione delle due curve (diverso dall'origine delle coordinate) determina la perpendicolare PS e dimostra che QS è la soluzione dell'equazione. A partire dalla costruzione geometrica deduce che questo tipo di equazione ha sempre una radice positiva.

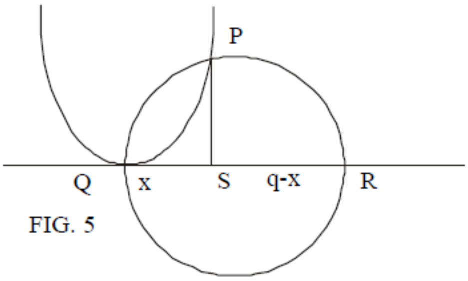

FIG. 5

Al-Khayyam realizza una dimostrazione di tipo sintetico utilizzando la teoria delle proporzioni. Applica la proprietà della parabola data da Apollonio:

$$x /PS = p/x. \qquad (1)$$

Considera ora il triangolo rettangolo QPR, la sua altezza PS è media proporzionale fra QS e RS:

$$x /PS = PS /(q - x). \qquad (2)$$

Da (1) e (2) ricava che:

$$p /x = PS /(q - x). \qquad (3)$$

D'altra parte, per la (1) ottiene che $PS = x^2/p$. Sostituendo questo valore nella (3) si vede che x soddisfa l'equazione:

$$x^3 + p^2x = p^2q.$$

L'autore risolve anche equazioni del tipo: $x^3 + a = bx$ per a e b positivi, con l'aiuto della parabola $y = x^2/\sqrt{b}$ e di una branca dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 - (a/b)x = 0$. Egli mette in evidenza che questo tipo di equazioni può avere più di una radice positiva o non ammettere nessuna soluzione (non prende in considerazione le radici negative). Determina le radici dell'equazione: $x^3 + a\,x^2 = c^3$ mediante l'intersezione di un'iperbole e di una parabola e quelle dell'equazione: $x^3 \pm a\,x^2 + b^2\,x = b^2\,c$ dall'intersezione di un'ellisse con un'iperbole.

Sinteticamente il metodo di Omar Khayyam è il seguente: sostituiamo, nell'equazione di terzo grado $x^3+ax^2+b^2x+c^3=0$, il termine x^2 con 2py, ottenendo : $2pxy+2apy+b^2x+c^3=0$. Tale equazione rappresenta una iperbole mentre $x^2=2py$ rappresenta una parabola; tracciando le due curve nello stesso sistema di riferimento, le ascisse dei punti di intersezione delle due curve saranno, ovviamente, le radici dell'equazione di terzo grado data.